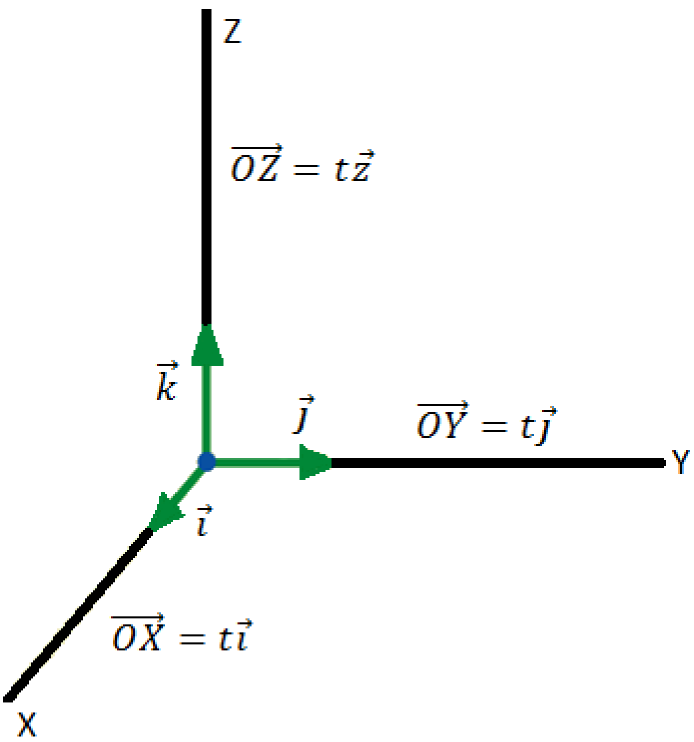
TEMA 11

GEOMETRÍA AFÍN

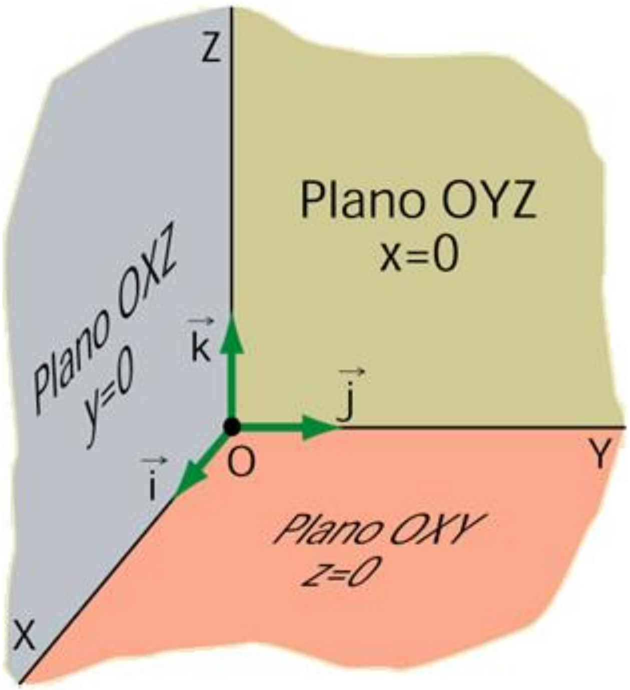
11.1. SISTEMA DE REFERENCIA

11.1.1. Ecuaciones de los ejes coordenados



	Vectorial	Paramétrica	Continua
Eje OX	$\vec{x} = t.\vec{i}$	$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$
Eje OY	$\vec{y} = t.\vec{j}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$	$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$
Eje OZ	$\vec{z} = t.\vec{k}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$	$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

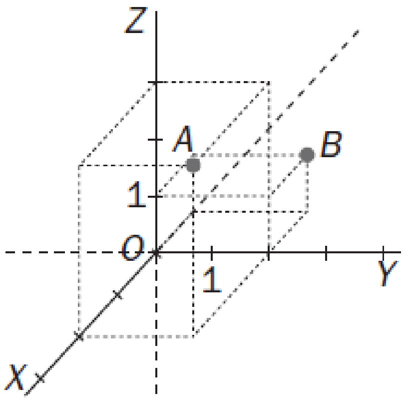
11.1.2. Ecuaciones de los planos coordenados



	Vectorial	Paramétrica	Implícita
Plano OXY	$\vec{x} = t.\vec{\imath} + s.\vec{\jmath}$	$\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=0 \end{cases}$	$z = 0$
Plano OXZ	$\vec{y} = t.\vec{\imath} + s.\vec{k}$	$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$	$y = 0$
Plano OYZ	$\vec{z} = t.\vec{\jmath} + s.\vec{k}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=s \end{cases}$	$x = 0$

EJERCICIOS 11.1

1. **Representa los puntos del espacio de tres dimensiones A(2, 2, 3) y B(–1, 2, 1) tomando $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ como referencia.**



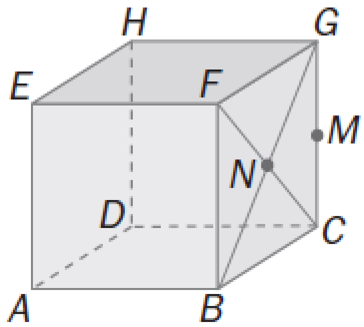
11.2. COMPONENTES DE UN VECTOR DADOS DOS PUNTOS

Dados dos puntos A(x_1, y_1, z_1) y B(x_2, y_2, z_2) el vector $\overrightarrow{AB}$ viene determinado por la siguiente expresión:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

EJERCICIOS 11.2

1. **En el cubo de la figura se toma la referencia: $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$.**
   Calcula las coordenadas de los puntos *F*, *G*, *C*, *M* y *N*.



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \boxed{F(1,0,1)}$

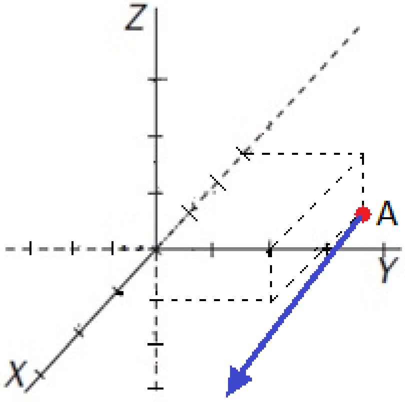
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \boxed{G(1,1,1)}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Longrightarrow \boxed{C(1,1,0)}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Longrightarrow$
$\boxed{M(1,1,\frac{1}{2})}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} =$
$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Longrightarrow \boxed{N(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$

2. Las coordenadas de un vector son (4, 0, −2) y las de su origen (−3, 2, −1). Calcula las coordenadas de su extremo.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,0,-2)$

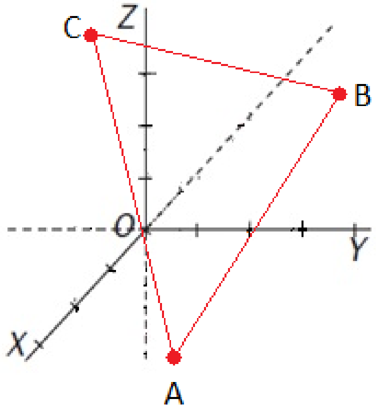
$\mathrm{A}(-3,2,-1)$

$\mathrm{B}(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tenemos que:

$$\begin{cases} b_1 + 3 = 4 \\ b_2 - 2 = 0 \\ b_3 + 1 = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \Longrightarrow B(1,2,-3) \\ b_3 = -3 \end{cases}$$

3. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices *A*(2, 2, −1), *B*(−1, 3, 2) y *C*(0, −2, 4).



Aplicando la fórmula para el cálculo de las coordenadas del punto medio de un segmento:

M punto medio de *AB* $\Longrightarrow M\left(\frac{2-1}{2},\frac{2+3}{2},\frac{-1+2}{2}\right)=\boxed{M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)}$

N punto medio de *AC* $\Longrightarrow N\left(\frac{2+0}{2},\frac{2-2}{2},\frac{-1+4}{2}\right)=\boxed{N\left(1,0,\frac{3}{2}\right)}$

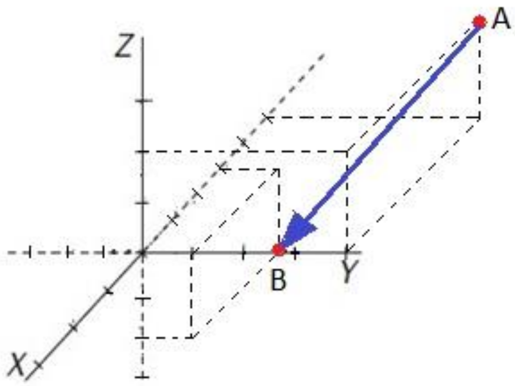
P punto medio de *BC* $\Longrightarrow P\left(\frac{-1+0}{2},\frac{3-2}{2},\frac{2+4}{2}\right)=\boxed{P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)}$

4. Dado el segmento $\overrightarrow{AB}$, donde A (–5, 4, –2) y B (–2, 1, –2):

a. Calcula las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

b. Calcula las coordenadas del punto N tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

c. Calcula las coordenadas del punto medio $\overrightarrow{MN}$



a. $M(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3)$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$(\mathrm{m}_1 + 5, \mathrm{m}_2 - 4, \mathrm{m}_3 + 2) = \frac{4}{3}(3, -3, 0) = (4, -4, 0)$$

$$\mathrm{m}_1 + 5 = 4 \Longrightarrow \mathrm{m}_1 = -1$$

$$\mathrm{m}_2 - 4 = -4 \Longrightarrow \mathrm{m}_2 = 0$$

$$\mathrm{m}_3 + 2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{m}_3 = -2$$

Entonces $\boxed{M(-1, 0, -2)}$.

b. $N(n_1, n_2, n_3)$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$(n_1 + 5, n_2 - 4, n_3 + 2) = \frac{2}{3}(3, -3, 0) = (2, -2, 0)$$

$$n_1 = -3$$

$$n_2 - 4 = -2 \Longrightarrow n_2 = 2$$

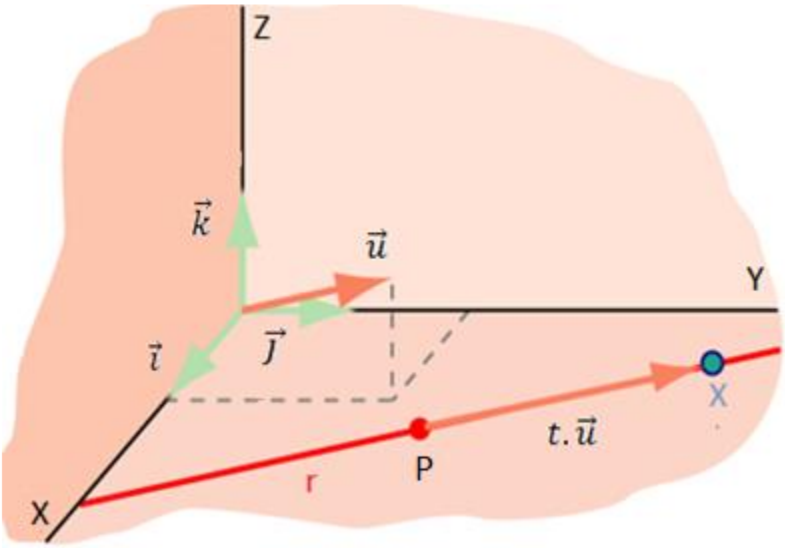
$$n_3 = -2$$

Entonces $\boxed{N(-3, 2, -2)}$

c. P Punto medio de $MN \Longrightarrow P\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-2-2}{2}\right) = \boxed{P(-2, 1, -2)}$

11.3. ECUACIONES DE LA RECTA

11.3.1. Ecuación vectorial



- Una recta viene determinada por un punto y una dirección. La dirección viene marcada por un vector libre $\vec{u}$ llamado **vector director**.

- Un punto X está en la recta si y sólo si $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{u}$ son proporcionales:

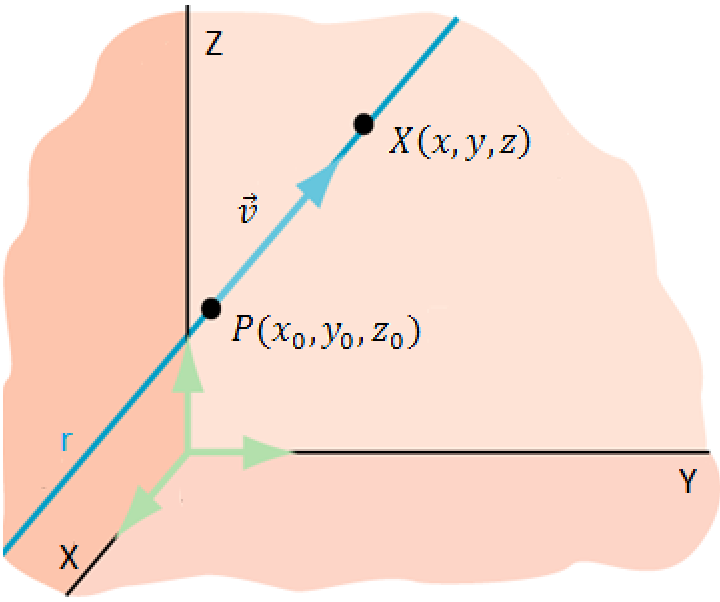
$$\left[\, \overrightarrow{PX} \,\right] = t.\vec{u}$$

- Si $\vec{p}$ es el vector de posición de P, $\vec{x}$ es el vector de posición de X, quedará:

$$\vec{x} - \vec{p} = t.\vec{u} \rightarrow \vec{x} = \vec{p} + t.\vec{u}$$

La expresión $\vec{x} = \vec{p} + t.\vec{u}$ con $t \in \mathbb{R}$ es la **ecuación vectorial** de la recta que pasa por P y tal que $\vec{u}$ es el vector director de la misma.

11.3.2. Ecuaciones paramétricas



- La recta que pasa por P de vector director $\vec{v} = v_1, v_2, v_3$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$$

- Al igualar coordenadas obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t.v_1 \\ y = y_0 + t.v_2 \\ z = z_0 + t.v_3 \end{cases}$$

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta *r* que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y que tiene por vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son:

$$\begin{cases} x = x_0 + t.v_1 \\ y = y_0 + t.v_2 \\ z = z_0 + t.v_3 \end{cases}$$

11.3.3. Ecuación en forma continua

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta *r* que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y que tiene por vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t.v_1 \\ y &= y_0 + t.v_2 \\ z &= z_0 + t.v_3 \end{aligned}$$

Despejando t en cada una de ellas e igualando, obtenemos las ecuaciones de la recta que no dependen de ningún parámetro.

Las **ecuaciones en forma continua** de la recta *r* que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y que tiene por vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

11.3.4. Ecuación implícita

Las **ecuaciones en forma continua** de la recta *r* que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y que tiene por vector director $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

De aquí tenemos tres ecuaciones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \qquad \frac{z - z_0}{v_3} = \frac{x - x_0}{v_1} \qquad \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Como la tercera ecuación es suma de las otras dos, suprimiendo una de ellas, la tercera por ejemplo, y operando obtenemos:

$$v_2.x - v_1.y + y_0.v_1 - x_0.v_2 = 0$$

$$v_3.y - v_2.z + z_0.v_2 - y_0.v_3 = 0$$

EJERCICIOS 11.3

1. **Dadas las rectas siguientes:**

   a. $\boldsymbol{x = 2 - \lambda}$
      $\boldsymbol{y = 1}$
      $\boldsymbol{z = 2\lambda}$

   b. $\boldsymbol{(x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(3, 1, 4)}$

   c. $\boldsymbol{\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3}}$

   d. $\boldsymbol{x - y + z = 1}$
      $\boldsymbol{y - z = 2}$

Calcular un punto y un vector de dirección de dichas rectas.

a. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Punto P}(2, 1, 0)\\ \text{Vector } \vec{v}(-1, 0, 2)\end{array}}$

b. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Punto P}(0, -1, 2)\\ \text{Vector } \vec{v}(3, 1, 4)\end{array}}$

c. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Punto P}(0, 1, -2)\\ \text{Vector } \vec{v}(2, 1, -3)\end{array}}$

d. Para calcular el punto y el vector el método más sencillo es resolver el sistema con lo que nos aparecerán las ecuaciones paramétricas de la recta dada.

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \; y = 2 + z$$

Sistema compatible determinado con un parámetro *z*=*λ*

Por lo tanto: $y = 2 + \lambda$

Sustituimos en la primera ecuación los valores de *y* y *z*:

$$x - (2 + \lambda) + \lambda = 1$$

Despejamos x:

$$x = 1 + 2 - \lambda - \lambda$$
$$x = 3 - 2\lambda$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} Punto\ P(3,2,0) \\ Vector\ \vec{v}(-2,1,1) \end{array}}$$

2. Comprueba si los puntos A(-3,1,3), B(3,1,5) y C(1,-1,2) pertenecen o no a la recta que pasa por P(-1,1-1) y tiene como vector director $\vec{v}$=(-2,0,-3). Calcula dos puntos más de esta recta.

Las ecuaciones paramétricas son r: $\begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$

$$A(-3,1,3) \Rightarrow \begin{cases} -3 = -1 - 2\lambda \\ 1 = 1 \\ 3 = -1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ 1 = 1 \\ \lambda = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \notin r}$$

$$B(3,1,5) \Rightarrow \begin{cases} 3 = -1 - 2\lambda \\ 1 = 1 \\ 5 = -1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ 1 = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B \in r}$$

$$C(1,-1,2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = -1 - 2\lambda \\ -1 \neq 1 \\ 2 = -1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{C \notin r}$$

Dos puntos de esta recta se obtienen sustituyendo λ por dos valores distintos:

$$\lambda = 0 \Rightarrow P_1(-1,1,-1)$$
$$\lambda = 1 \Rightarrow P_2(-3,1,-4)$$

11.4. FORMAS DE DETERMINAR UNA RECTA

11.4.1. Dado un punto y un vector de dirección

Este apartado se explica con el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Dado el punto A(1,1,-1) y el vector de dirección $\vec{v}$(2,0,1). Calcular todas las ecuaciones de la recta.

Ecuación vectorial:

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda(2,0,1)}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = -1 + 1\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right\}}$$

Ecuación continua:

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}}$$

*¡OJO! Si en la ecuación continua aparece un 0 en el denominador nunca debemos dejar la ecuación de esta forma, la pasaremos a otro tipo de ecuación.

Pasamos la ecuación continua a implícita

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}$$

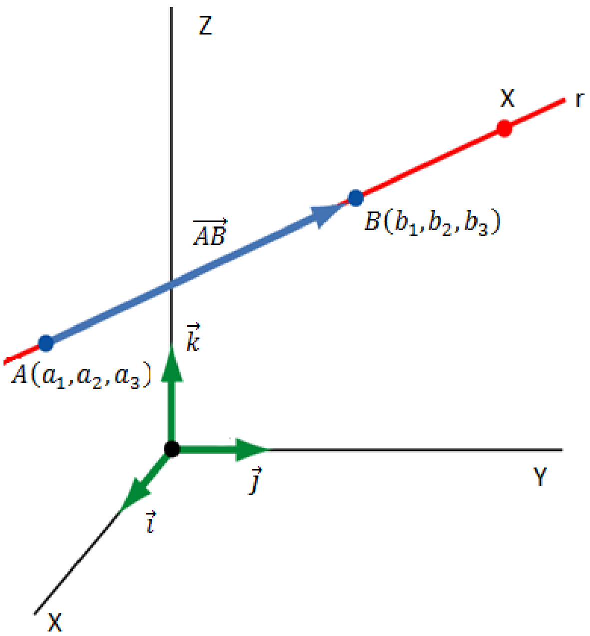
Con la primera igualdad sacamos una ecuación y con la segunda otra, simplemente tenemos que multiplicar en cruz.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}\Rightarrow 0(x-1)=2(y-1)\Rightarrow 2y-2=0$$
$$\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}\Rightarrow 1(y-1)=0(z+1)\Rightarrow y-1=0$$

<u>Ecuación implícita:</u>

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} 2y-2=0 \\ y-1=0 \end{array}\right\}}$$

11.4.2. Dados dos puntos



La recta *r* queda determinada por la siguiente determinación lineal: $r=(A,\overrightarrow{AB})$ o $r(B,\overrightarrow{AB})$.

Por tanto la ecuación de la recta será:

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t.(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$$

11.4.3. Como intersección de dos planos

Se explica con el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Dados los planos $\Pi_1 \equiv x - 2y + z = 3$ y $\Pi_2 \equiv 2y - z = 5$. Calcular la ecuación de la recta determinada por la intersección de dichos planos.

Simplemente tenemos que colocar las dos ecuaciones de los planos formando la ecuación implícita de la recta.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} x - 2y + z = 3 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right]}$$

*¡OJO! Si nos pidiera la ecuación de la recta de alguna forma determinada: vectorial, continua, etc. Solo tendríamos que pasarla a paramétricas y a partir de ahí con un punto y un vector de dirección de la recta obtendríamos el resto de las ecuaciones o la que nos pida.

EJERCICIOS 11.4

1. **Considera la recta que pasa por el punto S(1,-2,5) y lleva la dirección del vector $\vec{v}$=(-2,2,0).**

    a. **Calcula su ecuación vectorial**

    b. **Halla sus ecuaciones paramétricas**

a. Ecuación vectorial: $\boxed{\vec{p} = (1,-2{,}5) + \lambda(-2{,}2{,}0)}$

b. Ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}}$$

2. **Calcula, en cada caso, unas ecuaciones implícitas de la recta que cumple las siguientes condiciones:**

   a. **Pasa por el punto A(-1,1,3) y lleva la dirección del vector $\vec{u}$=(-1,-2,4)**
   b. **Pasa por los puntos A(2,2,-1) y B(2,-4,2)**
   c. **Pasa por el punto A(-1,-2,0) y es paralela al segmento de extremos B(0,-3,1) y C(1,1,0).**
   d. **Pasa por el punto A(2,-2,-3) y es paralela al eje Y.**

a.

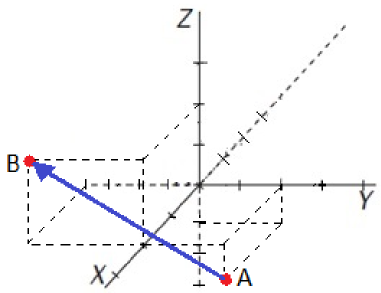
$$r:\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x-2 = -y+1 \\ 4x+4 = -z+3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 4x+z+1=0 \end{cases}}$$

b.

$$r:\begin{cases} x = 2 \\ y = 2-2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow$$

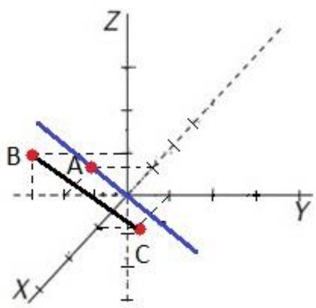
$$\begin{cases} -2x+4 = 0 \\ y-2 = -2z-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x-2=0 \\ y+2z=0 \end{cases}}$$



c.

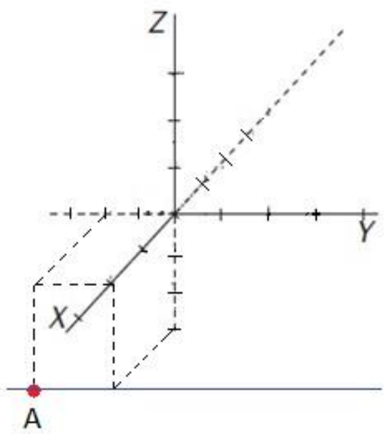
$$r:\begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2+4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x+4 = y+2 \\ -x-1 = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 4x-y+2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}}$$



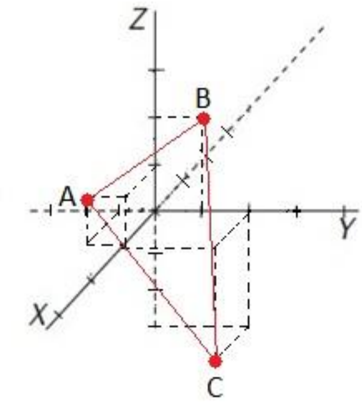
d.

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + \lambda \\ z = -3 \end{cases} \Longrightarrow r: \frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{0} \Longrightarrow$$



$$\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ z = -3 \end{cases}}$$

3. Halla las ecuaciones implícitas de las rectas sobre las que descansan los lados del triángulo de vértices A(1,-1,1), B(0,1,2) y C(1,2,-3).



$$AB:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Longrightarrow AB: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2 = -y-1 \\ x-1 = -z+1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} 2x+y-1 = 0 \\ x+z-2 = 0 \end{cases}}$$

$$AC:\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases} \Longrightarrow AC: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-4} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x-3 = 0 \\ -4y-4 = 3z-3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x-1 = 0 \\ 5x+3z+1 = 0 \end{cases}}$$

$$BC:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2-5\lambda \end{cases} \Longrightarrow BC: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y-1 \\ -5x = z-2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x-y+1 = 0 \\ 5x+z-2 = 0 \end{cases}}$$

4. Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta de ecuaciones implícitas.

a. $\mathbf{r:}\begin{cases} \boldsymbol{x+y=0} \\ \boldsymbol{2x-y+z=0} \end{cases}$ **b.** $\mathbf{s:}\begin{cases} \boldsymbol{3x-2y-z=0} \\ \boldsymbol{x+y+z-3=0} \end{cases}$

a.

$$\text{r:}\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}}$$

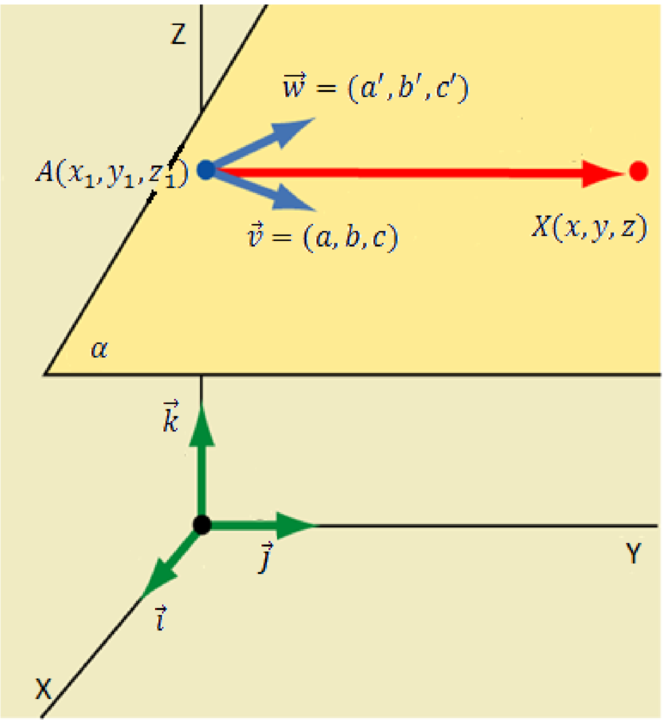
b.

$$\text{s:}\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=1+5\lambda \end{cases}}$$

11.5. ECUACIONES DE LOS PLANOS

11.5.1. Ecuación vectorial

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes. Se dice que $\alpha(A, \vec{v}, \vec{w})$ es una determinación lineal del plano α.



X está en el plano α si y solo si $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Por tanto existirán dos números reales s y t tales que:

$$\overrightarrow{AX} = s.\vec{v} + t.\vec{w}$$

Por tanto:

$$\vec{x} - \vec{a} = s.\vec{v} + t.\vec{w}$$

Y de aquí se obtiene la ecuación vectorial del plano:

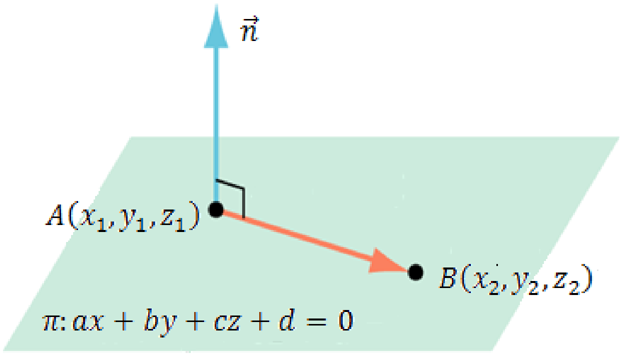
$$\vec{x} = \vec{a} + s.\vec{v} + t.\vec{w}$$

$$con\ s\ y\ t\ \epsilon \mathbb{R}$$

Además: $X \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow Rango\left(\overrightarrow{AX}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 2 \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AX}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0$

11.5.2. Ecuacionesparamétricas

Partiendo de la ecuación vectorial del plano:



$$(x,y,z)=(x_1,y_2,z_3)+t(a,b,c)+s(a',b',c')$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = x_1 + ta + sa' \\ y = y_1 + tb + sb' \\ z = z_1 + tc + sc' \end{cases}$$

11.5.3. Ecuación normal

- VECTOR NORMAL AL PLANO

Observamos que:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

Como $A \in \pi$ y $B \in \pi$ tenemos que:

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$
$$ax_2+by_2+cz_2+d=0$$

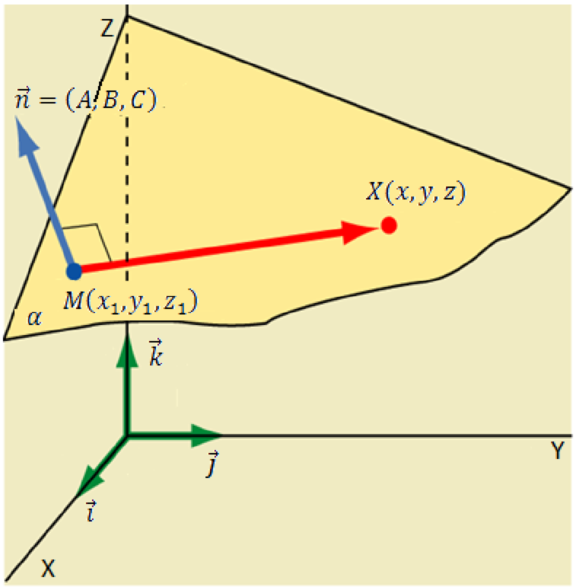
Restando término a término obtenemos:

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0$$
$$(a,b,c).(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=0$$

$$\boxed{\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0}$$

El vector $\vec{n}$ es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano, está en una dirección perpendicular al plano. Recibe el nombre de **vector normal** al plano.

- <u>ECUACIÓN NORMAL</u>



Sea M un punto cualquiera del plano α, y sea(A,B,C) un vector normal al plano.

Un punto X(x,y,z) está en el plano si y solo si $\vec{n}$ es perpendicular a $\overrightarrow{MX}$. Por tanto:

$\vec{n}.\overrightarrow{MX} = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{n}.(\vec{x} - \vec{m}) = 0}$

que es la **ecuación normal** al plano.

Desarrollando la ecuación anterior obtenemos:

$$(A, B, C).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$
$$A.(x - x_1) + B.(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

O bien:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

donde A,B y C son las componentes del vector normal al plano.

EJERCICIOS 11.5

1. **Dados los planos:**
   a. $\boldsymbol{\Pi_1 \equiv 3x - 2y + z = 0}$

   b. $\boldsymbol{(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 0, 2) + \mu(-1, 2, 1)}$

   c. $$\boldsymbol{\Pi_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda - \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.}$$

Calcular un punto, dos vectores de dirección y un vector normal (perpendicular) a dichos planos.

a. $\Pi_1 \equiv 3x - 2y + z = 0$

Para calcular un **punto** basta con dar dos valores cualquiera a dos de las incógnitas y despejar la otra.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow 3.0 - 2.0 + z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Punto } \boxed{P(0,0,0)}$$

Vector normal (coeficientes que acompañan a la x, y, z).

Vector normal = $\boxed{\vec{n}(3, -2, 1)}$

Para hallar dos **vectores de dirección** del plano pasaremos la ecuación del plano a paramétricas.

$\Pi_1 \equiv x - 2y + z = 0 \longrightarrow$ Resolvemos este sistema que es S.C.I. con dos parámetros.

$$\left. \begin{array}{l} y = \lambda \\ \\ z = \mu \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} 3x - 2\lambda + \mu = 0 \quad \Longrightarrow \text{Despejamos la x} \Longrightarrow \\ x = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \quad \Longrightarrow \text{ la ecuación paramétrica será:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right\}$$

Los vectores de dirección serán los coeficientes de λ y μ.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v}_1\left(\frac{2}{3},1{,}0\right)\\ \vec{v}_2\left(-\frac{1}{3},0,\mu\right)\end{array}}$$

b. $(x,y,z)=(1{,}0{,}1)+\lambda(1{,}0{,}2)+\mu(-1{,}2{,}1)$

Punto: $\boxed{P(1{,}0{,}1)}$

Vectores de dirección:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v}_1(1{,}0{,}2)\\ \vec{v}_2(-1{,}2{,}1)\end{array}}$$

Vector normal:

Para calcular el vector normal ($\vec{n}$) calculamos el producto vectorial de los vectores directores.

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(0-4)\vec{\imath}-(1+2)\vec{\jmath}+(2-0)\vec{k}\Longrightarrow\boxed{\vec{n}=(-4,-3{,}2)}$$

c.

$$\Pi_3\equiv\begin{cases}x=2\lambda-\mu\\ y=3+\mu\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

Punto: $\boxed{P(0{,}3{,}1)}$

Vectores de dirección:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v}_1(2{,}0,-1)\\ \vec{v}_2(-1{,}1,-1)\end{array}}$$

Vector normal:

$$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\Longrightarrow\boxed{\vec{n}=(1{,}3{,}1)}$$

11.6. FORMAS DE DETERMINAR UN PLANO

11.6.1. Por un punto y dos vectores de dirección

Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo

Dado el punto P(1,0,1) y los vectores de dirección $\vec{v}_1(1,1,-1)$ y $\vec{v}_2(0,2,0)$. Calcular todas las ecuaciones de los planos.

Ecuación vectorial

$$\boxed{\Pi \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,1,-1) + \mu(0,2,0)}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\boxed{\Pi \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + 1\lambda + 0\mu \\ y = 0 + 1\lambda + 2\mu \\ z = 1 + (-1)\lambda + 0\mu \end{array}\right] \Longrightarrow \Pi \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 1 - \lambda \end{array}\right]}$$

Ecuación general

Es del tipo $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

Hay dos métodos:

a. Calculamos el vector normal $\vec{n}$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = (2,0,2)$$

Nuestro plano tendrá la ecuación:

$$\Pi \equiv 2x + 0y + 2z + D = 0$$

Para calcular D, sólo tenemos que sustituir las coordenadas del punto P en la x, y, z del plano.

$$P \in \Pi \Longrightarrow 2.(1) + 0.(0) + 2.(1) + D = 0$$

$$2 + D = 0$$

$$D = -2$$

Ecuación general: $\Pi \equiv 2x + 2z - 2 = 0$

b. Pasamos de ecuaciones paramétricas a ecuaciones generales resolviendo cualquiera de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \Pi \equiv 2x + 2z - 2 = 0$$

ó

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & 2 & y-0 \\ -1 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \Pi \equiv 2x + 2z - 2 = 0$$

11.6.2. Por un punto y un vector normal (perpendicular al mismo)

Ejemplo:

Dado el punto P(1,0,1) y el vector normal $\vec{n}(2,0,2)$ el plano $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, se calcula de la siguiente manera:

A, B, C son las coordenadas del vector $\vec{n} \Longrightarrow \Pi \equiv 2x + 0y + 2z + D = 0$

Para hallar D, sustituimos las coordenadas del punto P(1,0,1) en x, y, z del plano.

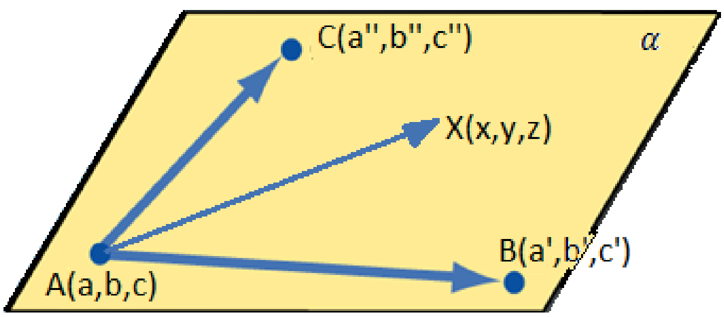
$$2.(1) + 0.(0) + 2.(1) + D = 0$$

$$D = -2$$

El plano Π será: $\Pi \equiv 2x + 2z - 2 = 0$

11.6.3. Por tres puntos no alineados

Sean A, B, C tres puntos no alineados. Por tanto los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son paralelos.



La determinación lineal de dicho plano será:

$$\alpha(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Por lo tanto su ecuación se obtendrá desarrollando el siguiente determinante:

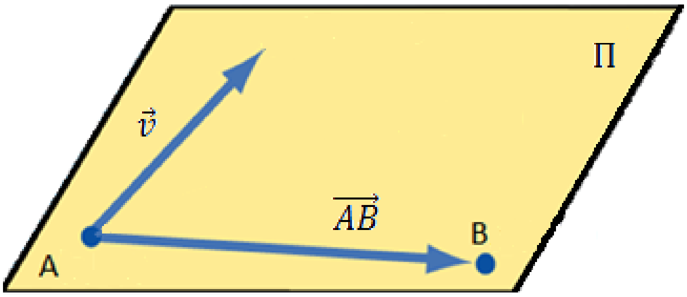
$$\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Si A(a,b,c), B(a',b',c') y C(a'',b'',c'') entonces α tendrá la ecuación:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ a''-a & b''-b & c''-c \end{vmatrix} = 0}$$

11.6.4. Plano que pasa por dos puntos y contiene un vector de dirección

Ejemplo



Dados los puntos A(1,0,1), B(2,1,0) y el vector de dirección $\vec{v}$(1,-1,1). Calcular la ecuación del plano que determinan.

Para determinar el plano necesitamos un punto y dos vectores de dirección ó un punto y un vector normal.

- El punto puede ser el A(1,0,1)
- Un vector de dirección será $\vec{v}$=(1,-1,1)
- El otro vector de dirección es:

$$\overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (1,0,1) = (1,1,-1)$$

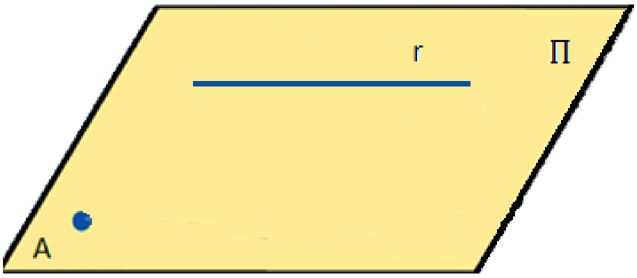
Y ya podemos sacar la ecuación vectorial o paramétrica:

$$\boxed{\Pi \equiv (x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,1) + \mu(1,1,-1)}$$

*¡OJO! Si nos piden alguna ecuación en particular sólo tenemos que pasar de una ecuación a otra.

11.6.5. Plano que pasa por un punto y contiene una recta

Ejemplo

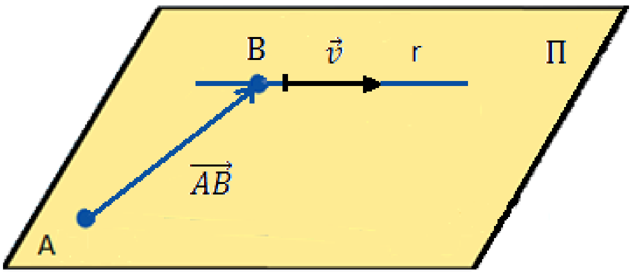


$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = z - 1}$$

$$\boldsymbol{A(2,0,1)}$$

Para hallar Π, necesitamos un punto y dos vectores de dirección ó un punto y un vector normal al plano.

El punto ya lo tenemos es el punto A(2,0,1).



Un vector de dirección del plano será el vector de dirección de la recta r.

$$\vec{v} = (2,1,0)$$

Para hallar el otro vector de dirección del plano, cogemos un punto B de r, B(1,0,1).

Y el otro vector de dirección de Π será el vector $\overrightarrow{AB}$ ó el $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (2,0,1) = (-1,0,0)$$

Así tenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \text{Punto:} & A(2,0,1) \\ \bullet\ \text{Vectores:} & \vec{v}(2,1,0) \\ & \overrightarrow{AB} = (-1,0,0) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Ecuación vectorial del plano:

$$\boxed{\Pi \equiv (x,y,z) = (2,0,1) + \lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,0)}$$

EJERCICIOS 11.6

1. **Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que cumple las siguientes condiciones.**

   a. **Pasa por A(2,2,2) y lleva la dirección de $\vec{u}$=(0,-2,1) y $\vec{v}$=(3,-1,2).**

   b. **Pasa por A(2,2,2) y tiene como vectores de dirección $\vec{u}$=(-3,-2,1) y $\overrightarrow{AB}$, donde B(1,2,-1).**

a. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & x-2 \\ -2 & -1 & y-2 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -4x+8+3y-6+x-2+6z-12=0 \Longrightarrow -3x+3y+6z-12=0 \Longrightarrow \boxed{\pi: x-y-2z+4=0}$

b. $\begin{cases} A(2,2,2) \\ \overrightarrow{AB}(-1,0,-3) \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -3 & x-2 \\ 0 & -2 & y-2 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2z-4+9y-18-6x+12+y-2=0 \Longrightarrow \\ \vec{u}(-3,-2,1) \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{\pi: 3x-5y-z+6=0}$

2. Calcula unas ecuaciones paramétricas del plano de ecuación implícita x+y+z=3 e indica uno de sus puntos y dos vectores de dirección independientes.

Haciendo $x = \lambda, y = \mu$: $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 - \lambda - \mu \end{array} \right.$

Un punto sería el $\boxed{A(0,0,3)}$ y dos vectores de dirección independientes $\boxed{\vec{u} = (1,0,-1) \text{ y } \vec{v} = (0,1,-1).}$

3. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2,-2,1), B(1,-2,-1) y C(0,-1,2).

$$\left\{\begin{array}{l} A(2,-2,1) \\ \overrightarrow{AB}(-1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}(-2,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-2 \\ 0 & 1 & y+2 \\ -2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -z+1+4y+8+2x-4+y+2=0 \Longrightarrow$$

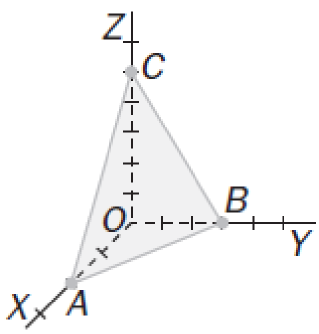
$$\Longrightarrow \boxed{\pi: 2x+5y-z+7=0}$$

4. **Halla las ecuaciones de los siguientes planos:**

   a. **Paralelo a XOY y que pasa por A(-1,2,-2)**
   b. **Paralelo a XOZ y que pasa por B(3,-2,0)**
   c. **Paralelo a YOZ y que pasa por C(0,-2,-2)**

a. $\boxed{z = -2}$
b. $\boxed{y = -2}$
c. $\boxed{x = 0}$

5. **En la figura aparece un tetraedro de vértices los puntos O, A, B y C. calcula las ecuaciones de los planos que contienen a las cuatro caras del tetraedro.**



Los puntos son O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,3,0) y C(0,0,5). Las ecuaciones de las caras son:

$$\boxed{\begin{array}{l} OAB: z = 0 \\ OBC: x = 0 \\ OAC: y = 0 \end{array}}$$

$$ABC: \begin{vmatrix} -2 & -2 & x-2 \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 15x - 30 + 10y + 6z = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{15x + 10y + 6z - 30 = 0}$$

6. Indica un vector director y otro normal del plano de ecuación -2x+2y+z=0.

Dos puntos del plano: $x = 0, y = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow O(0,0,0); x = 0,$ $y = 1 \Longrightarrow 2 + z = 0 \Longrightarrow z = -2 \Longrightarrow A(0,1,-2).$

Un vector de dirección es $\boxed{\overrightarrow{OA} = (0,1,-2).}$

Un vector normal es $\boxed{\vec{n} = (-2,2,1)}$

7. Halla un vector director y otro normal del plano que pasa por los puntos $\mathbf{A}(-\mathbf{1},\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}})$ y $\mathbf{B}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},-\mathbf{1},\mathbf{0})$, y por el origen de coordenadas.

La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & x \\ 2 & -1 & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}x - z = 0$

$$\Longrightarrow \pi: 2x + y = 0$$

Un vector de dirección es el $\boxed{\overrightarrow{OA} = (-1,2,\frac{1}{3})}$ paralelo a (-3,6,1).

Un vector normal es $\boxed{\vec{n} = (2,1,0)}$

8. Un plano tiene como vector normal el $\vec{n} = (2, -3, 2)$ y pasa por el punto A(-1,2,-5). Escribe su ecuación normal, su ecuación implícita y sus ecuaciones paramétricas.

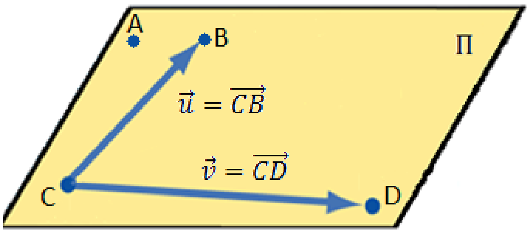
El plano es $2(x+1) - 3(y-2) + 2(z+5) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 2x + 2 - 3y + 6 + 2z + 10 = 0 \Longrightarrow 2x - 3y + 2z + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -9 - \lambda + \frac{3}{2}\mu \end{cases}$$

9. **Se sabe que los puntos A(m,0,1), B(0,1,2), C(1,2,3) y D(7,2,1) están en un mismo plano.**
   a) **Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.**
   b) **¿Están B, C, D alineados?**

a)



Si A, B, C y D son coplanarios $\Longrightarrow$ $\mathrm{A} \in$ plano determinado por C, B, D

- Calculamos el plano π

$$\begin{cases} pto.\, C(1,2,3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{CB} = (-1,-,1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{CD} = (6,0,-2) \end{cases}$$

- Ecuación de $\pi \equiv Ac + By + Cz + D = 0$

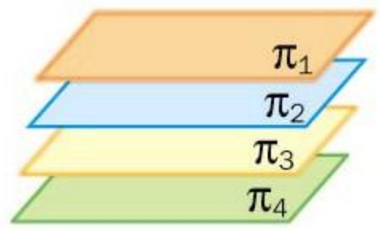
- Si $A \in \pi \Longrightarrow$ sus coordenadas cumplen la ecuación del plano $\pi \Longrightarrow Am + b.0 + C.1 + D = 0$

- Ya sólo tenemos que despejar m.

b) Si A, B y C están alineados pertenecen a la misma recta.

11.7. HAZ DE PLANOS

- HAZ DE PLANOS PARALELOS



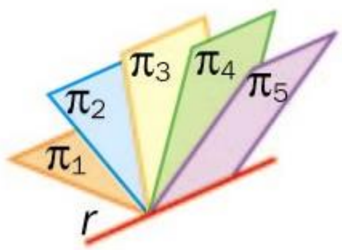
Dado:

$Ax + By + Cz + D = 0$

Los haces de planos se pueden expresar como:

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0 \;\; con\ \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

- HAZ DE PLANOS SECANTES



Dados:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Los haces de planos se pueden expresar como:

$$Ax + By + Cz + \lambda.(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

EJERCICIOS 11.7

1. **Escribe las ecuaciones de los siguientes haces de planos:**

   a. **Paralelos al plano** $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{3x + 3y - z - 3 = 0}$

   b. **Que tienen como vector normal el** $\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathbf{-1, 2, -3})$

   c. **Que contiene a la recta** $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \mathbf{x - y + z = 0} \\ \mathbf{2x - y + z = 0} \end{cases}$

   d. **Paralelos al plano coordenado XZ.**

   e. **Que contienen al eje de coordenadas Y.**

   a. $3x + 3y - z + D = 0$

   b. $-x + 2y - 3z + D = 0$

   c. $x - y + z + \lambda(2x - y + z) = 0$ y además el plano $2x - y + z = 0$

   d. $y + D = 0$

   e. $x + \lambda z = 0$ y además el plano $z = 0$

2. Escribe la ecuación de planos secantes que contienen a la bisectriz del ángulo formado por los ejes X e Y.

La bisectriz de $\widehat{XOY}$ tiene por ecuaciones r: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

La ecuación del haz que contiene a r será $x - y + \lambda z = 0$ añadiendo el plano z=0.

3. Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta que pasa por los puntos A(1,-1,3) y B(0,-2,1).

Las ecuaciones en forma continua de AB son:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ \\ 2x - 2 = z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

La ecuación del haz es $x - y - 2 + \lambda(2x - z + 1) = 0$

4. Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + t} \\ \boldsymbol{y = -2 + t} \\ \boldsymbol{z = 2 + 2t} \end{cases}$$

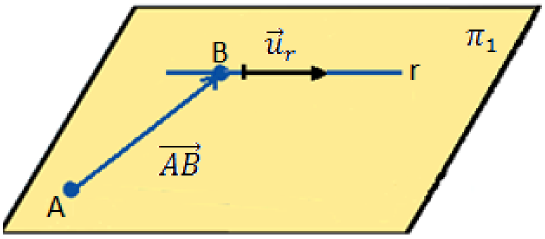
Las ecuaciones en forma continua de AB son:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = y + 2 \\ \\ 2x - 2 = z - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

La ecuación del haz es $x - y - 3 + \lambda(2x - z) = 0$

5. **Considera el punto A(0,-3,1). El plano $\pi \equiv 2x - 2y + 3z = 0$ y la recta $r: x + 3 = y = \frac{z-3}{2}$.**
   a) **Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.**
   b) **Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela al plano π y corta a r.**

a)



Plano $\pi_1 \begin{cases} A \in \pi \\ B \text{ de } r \in \pi \\ \vec{u}_r \text{ es un vector de dirección del plano.} \end{cases}$

Necesitamos un punto y dos vectores de dirección para hallar π_1.

Punto A de $r = (0, -3,1)$

$\vec{u}_r(1,0,2)$

B de $r = (-3,0,-3)$

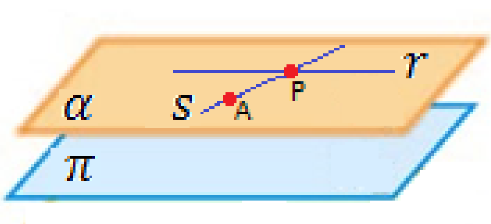
El otro vector de dirección es por ejemplo el vector

$\overrightarrow{AB} = (-3 - 0, 0 - (-3), 2 - 1) = (-3,3,1)$

$$\pi_1 \begin{cases} A(0,-3,1) \\ \vec{u}_r = (1,0,2) \\ \overrightarrow{AB} = (-3,3,1) \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv (x, y, z) = (0,3,-1) + \lambda(1,0,2) + \mu(-3,3,1)}$$

b)



Calculamos el haz de planos paralelos a

$\pi \equiv 2x - 2y + 3z = 0$

Haz de planos:

$2x - 2y + 3z + \lambda$, donde $\lambda \in \pi$

A continuación se calcula el plano α que contiene al punto A(0,-3,1).

$$A \epsilon \alpha \Longrightarrow 2.0 - 2.(-3) + 3.1 + \lambda = 0$$
$$\lambda = -9$$
$$\alpha \equiv 2x - 2y + 3z - 9 = 0$$

La intersección del plano α con la recta r me dará el punto B.

$$\left.\begin{array}{l} r: x + 3 = y = \frac{z-3}{2} \\ \alpha: 2x - 2y + 3z - 9 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema, las soluciones serán las coordenadas del punto P(a,b,c):

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = c \end{array}\right\}$$

La recta s que se pide viene dada por:

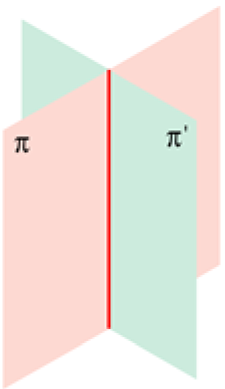
$$s: \begin{cases} A(0,-3,1) \\ \\ P(a,b,c) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} A(0,-3,1) \\ \\ \vec{u}_s = \overrightarrow{AP} \end{cases}$$

11.8. POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

11.8.1. De dos planos

Sean $\pi = ax + by + cz + d = 0$ y $\pi' = a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
Estudiar las posiciones relativas de ambos planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

- PLANOS SECANTES



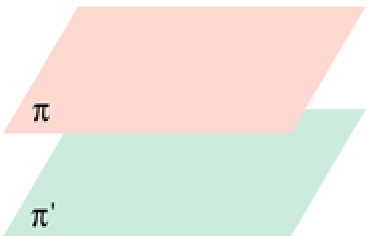
Tienen una recta en común.

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 2

$$rango(A) = rango(B) = 2$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \; o \; \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \; o \; \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

- PLANOS PARALELOS



No tienen puntos en común.

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$rango(A) = 1; rango\ (B) = 2$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

- PLANOS COINCIDENTES

Son el mismo plano

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
DE RANGO 1

$$rango(A) = rango(B) = 1$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

11.8.2. De plano y recta

Primer método

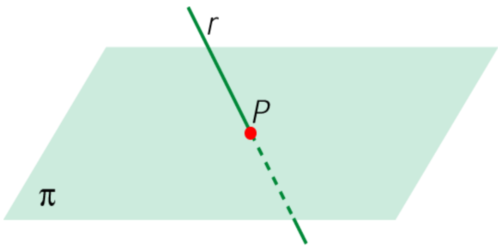
Sean $\pi = ax + by + cz + d = 0$ y la recta *r* dada como intersección de $\pi' = a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi'' = a''x + b''y + c''z + d'' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de la recta y el plano equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman las tres ecuaciones anteriores. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

Segundo método

Sean la recta r y el plano π dados por las ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

- RECTA Y PLANO SECANTES



Primer método

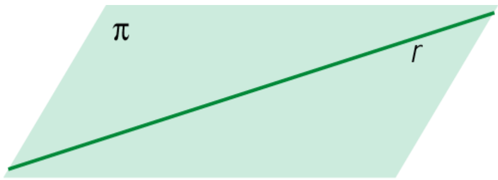
SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$$rango(A) = rango(B) = 3$$

Segundo método

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0$$

- RECTA CONTENIDA EN EL PLANO



Primer método

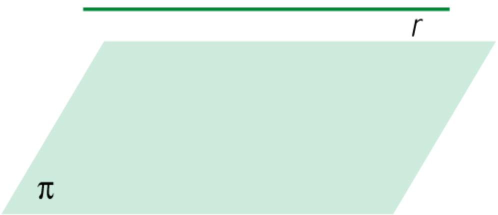
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 2

$$rango(A) = 2; rango\ (B) = 2$$

Segundo método

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

- RECTA Y PLANO PARALELOS



Primer método

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$rango(A) = 2; rango(B) = 3$$

Segundo método

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$$

11.8.3. De dos rectas

Primer método

Sea *r* dada como una intersección de $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ y $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$. Sea la recta *s* dada como la intersección de $c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$ y $d_1x + d_2y + d_3z + d_4 = 0$. Estudiar las posiciones relativas de ambas rectas equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman las cuatro ecuaciones anteriores. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

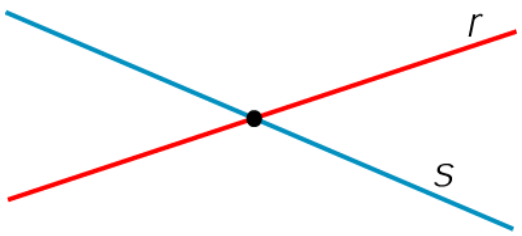
Segundo método

Sean las rectas r y s dadas por las ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = x_2 + \mu t_1 \\ y = y_2 + \mu t_2 \\ z = z_2 + \mu t_3 \end{cases}$$

El punto $A(x_1, y_1, z_1)$ está sobre la recta r y el punto $B(x_2, y_2, z_2)$ está sobre la recta s. El vector $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ tiene su origen sobre r y su extremo sobre s.

- RECTAS SECANTES



Las dos rectas tienen un punto en común.

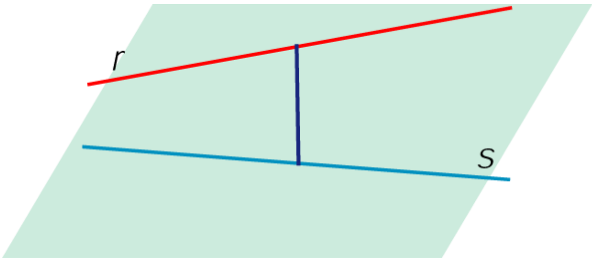
SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$$rango(A) = rango(B) = 3$$

Segundo método

$$\frac{v_1}{t_1} \neq \frac{v_2}{t_2} \; o \; \frac{v_1}{t_1} \neq \frac{v_3}{t_3} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- RECTAS QUE SE CRUZAN



Las rectas no tienen puntos en común.

SISTEMA INCOMPATIBLE

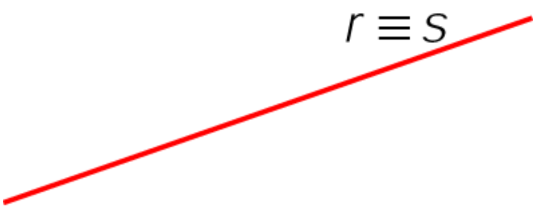
$$rango(A) = 3; rango(B) = 4$$

Segundo método

$$\frac{v_1}{t_1} \neq \frac{v_2}{t_2} \; o \; \frac{v_1}{t_1} \neq \frac{v_3}{t_3} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- RECTAS COINCIDENTES

Primer método



Las rectas tienen todos sus puntos coincidentes.

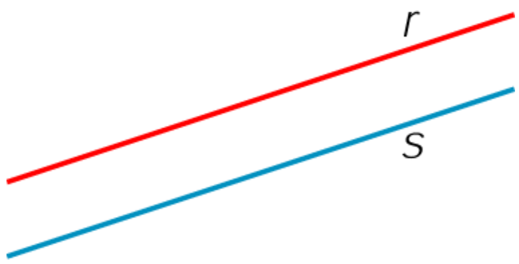
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 2

$$rango(A) = rango(B) = 2$$

Segundo método

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_3}{t_3} \quad \longrightarrow \quad \frac{x_2 - x_1}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{v_2} = \frac{z_2 - z_1}{v_3}$$

- RECTAS PARALELAS



Primer método

Las rectas no tienen ningún punto en común.

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$rango(A) = 2; rango(B) = 3$$

Segundo método

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_3}{t_3} \quad \longrightarrow \quad \frac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{v_2} \; o \; \frac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{v_3}$$

11.8.4. De tres planos

Primer método

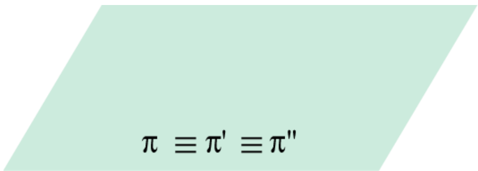
Sean *π: ax+by+cz+d=0, π': a'x+b'y+c'z+d'=0* y *π": a"x+b"y+c"z+d"=0*. Estudiar las posiciones relativas de ambos planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

Segundo método

Sean los planos de ecuaciones:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$\pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

- <u>TRES PLANOS COINCIDENTES</u>



<u>Primer método</u>

Los tres planos tienen infinitos puntos en común.

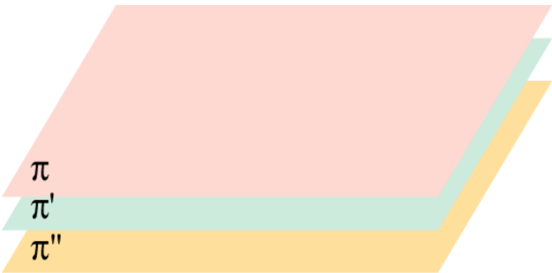
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 1

$$rango(A) = rango(B) = 1$$

<u>Segundo método</u>

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad y \quad \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} = \frac{d}{d''}$$

- <u>TRES PLANOS PARALELOS</u>



<u>Primer método</u>

Los tres planos no tienen puntos en común.

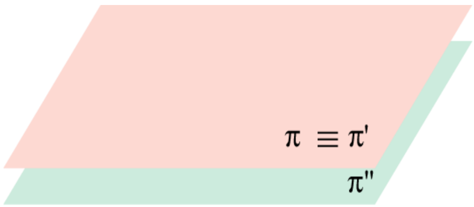
SISTEMA INCOMPATIBLE

$$rango(A) = 1; rango(B) = 2$$

<u>Segundo método</u>

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \quad y \quad \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} \neq \frac{d}{d''} \quad y \quad \frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} \neq \frac{d'}{d''}$$

- <u>DOS PLANOS COINCIDENTES Y PARALELOS AL TERCERO</u>



<u>Primer método</u>

Los tres planos no tienen puntos en común.

SISTEMA INCOMPATIBLE

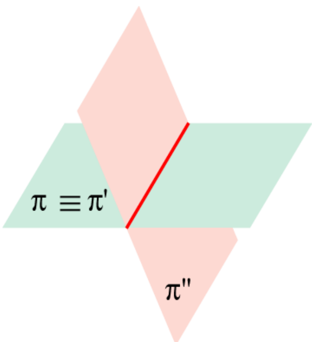
$$rango(A) = 1; rango(B) = 2$$

<u>Segundo método</u>

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad y \quad \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} \neq \frac{d}{d''}$$

- <u>DOSPLANOS COINCIDENTES Y UN TERCERO SECANTE A ELLOS</u>

<u>Primer método</u>



Los tres planos tienen una recta en común.

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 2.

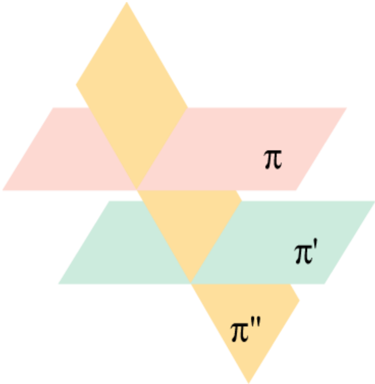
$$rango(A) = rango(B) = 2$$

<u>Segundo método</u>

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad y \quad (a, b, c) \neq k(a'', b'', c'')$$

- DOS PLANOS PARALELOS Y UN TERCERO SECANTE A ELLOS

Primer método



Los tres planos no tienen puntos en común

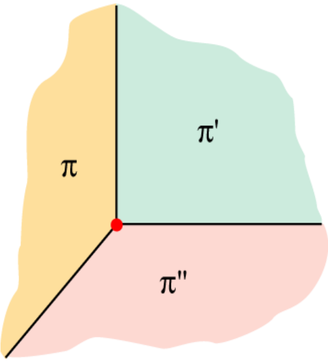
SISTEMA INCOMPATIBLE

$rango(A) = 2; rango(B) = 3$

Segundo método

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \quad y \quad (a,b,c) \neq k(a'',b'',c'')$$

- TRIEDRO

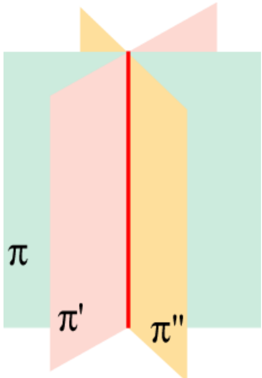


Los tres planos tienen un punto en común.

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO DE RANGO 3

$rango(A) = rango(B) = 3$

- TRES PLANOS DISTINTOS

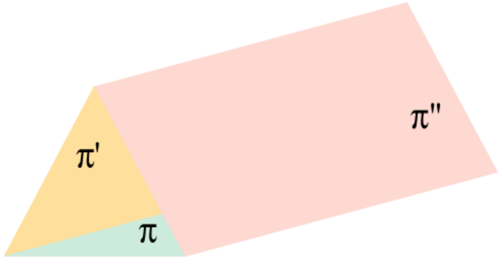


Los tres planos tienen una recta en común.

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO DE RANGO 2.

$rango(A) = rango(B) = 2$

- <u>PRISMA</u>



Los tres planos no tienen puntos en común.

SISTEMA INCOMPATIBLE

$rango(A) = 2; rango(B) = 3$

EJERCICIO 11.8

1. Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en los siguientes casos:

a. $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 3\lambda} \\ \boldsymbol{y = 2\lambda} \\ \boldsymbol{z = -2 + 4\lambda} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\pi: 3x - y + 2z + 1 = 0}$

b. $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2t + 3} \\ \boldsymbol{y = t - 1} \\ \boldsymbol{z = t + 2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\pi: x - 3y + z - 8 = 0}$

a. $3(2+3\lambda) - 2\lambda + 2(-2+4\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow 15\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Longrightarrow$ Se cortan en el punto $P\left(\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-14}{5}\right)$.

b. $2t + 3 - 3t + 3 + t + 2 - 8 = 0 \Longrightarrow 0t = 0 \Longrightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. Estudia la posición relativa del plano $x - 2y - z + 2 = 0$ y la recta $\begin{cases} y - z = 2 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, A(-1,2,0) y B(-4,1,-1)

Unas posibles ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$-1 - 3\lambda - 4 + 2\lambda + \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow 0\lambda = 3 \Longrightarrow$La recta es paralela al plano.

3. (SELECTIVIDAD) Calcula el valor de k para que la recta

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = k \end{cases}$$

Esté contenida en el plano $x + y - z - 1 = 0$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, A(0,0,k) y B(1,-2,k-1).

Unas posibles ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = k - \lambda \end{cases}$$

$$x + y - z - 1 = \lambda - 2\lambda - k + \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow 0\lambda = k + 1 \Longrightarrow \boxed{k = -1}$$

4. Estudia la posición relativa de los planos π y π’ en los siguientes casos:

a. $\boldsymbol{\pi: 2x - y - z = 0 \qquad \pi': -6x + 3y + 3z - 3 = 0}$

b. $\boldsymbol{\pi: x - y - 2z + \frac{1}{2} = 0 \quad \pi': -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{4} = 0}$

c. $\boldsymbol{\pi: 2x - y - z = 0 \qquad \pi': 2x + y - z - 3 = 0}$

a. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$rg(M) = 1; rg(M') = 2 \Longrightarrow$ los planos son paralelos.

b. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$rg(M) = 1; rg(M') = 1 \Longrightarrow$ los planos son coincidentes.

c. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$rg(M) = 2 \Longrightarrow rg(M') = 2 \Longrightarrow$los planos se cortan en una recta.

5. Estudia la posición relativa de los planos π y π'.

a. $\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = 3 \end{cases}$ $\qquad \pi': z = 3$

b. $\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + 2\mu - 1 \end{cases}$ $\qquad \pi': \begin{cases} x = 3 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda - 1 \\ z = \mu \end{cases}$

a. Se halla la ecuación implícita del primer plano: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0$

$\Longrightarrow z - 3 = 0 \Longrightarrow$los planos son coincidentes.

b. Se halla la ecuación implícita de cada plano:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z + 1 - x - 2y = 0 \Longrightarrow x + 2y - z = 1$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-3 \\ 1 & 0 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 3 + 2y + 2 - z = 0 \Longrightarrow x + 2y - z = 1$$

Los planos son coincidentes.

6. **(SELECTIVIDAD) Dados los puntos A(1,2,3), B(-1,1,0), C(2,1,-1) y D(4,2,2), estudia la posición de los planos determinados por A, B y C y por A, B y D. ¿Cómo son los puntos A, B, C y D?**

Ecuación del plano que pasa por A, B y C:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-2 \\ -3 & -4 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 11y + 3z + 12 = 0$$

Ecuación del plano que pasa por A, B y D:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & x-1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ -3 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 11y + 3z + 12 = 0$$

7. Estudia la posición relativa de los planos siguientes:

$\boldsymbol{\pi: x - 3y - 2z = 2}$

$\boldsymbol{\pi': -2x + 6y + 4z = -4}$

$\boldsymbol{\pi'': 3x - 9y - 6z = 6}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & -4 \\ 3 & -9 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

$rg(M) = 1 \Longrightarrow rg(M') = 1 \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado con dos parámetros. Entonces los tres planos son coincidentes.

8. Estudia la posición relativa de los planos:

$\boldsymbol{\pi: x - y - 3z = 1}$

$\boldsymbol{\pi': -2x + 2y + 6z = -2}$

$\boldsymbol{\pi'': x + y + z = 0}$

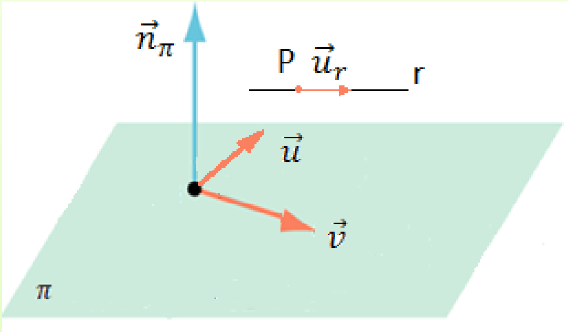
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(M) = 2 \Longrightarrow rg(M') = 2 \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Además, los dos primeros planos son coincidentes. Se trata, por tanto, de dos planos coincidentes y otro que se corta.

11.9. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

11.9.1. Recta y plano paralelos

Dado un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto P(a,b,c), hallar una recta r que pase por P y sea paralela a π.

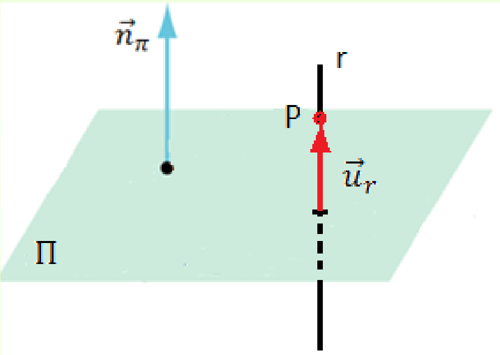


a. Si $r \parallel \pi \Longrightarrow \vec{u}_r$ tiene la dirección del plano π
b. Calculamos un vector de dirección de π, por ejemplo $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.
c. La recta r vendrá determinada por:

$$r: \begin{cases} \text{Punto } P(a,b,c) \\ \vec{u}_r = \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

11.9.2. Recta y plano perpendiculares

- Recta que pasa por un P(a,b,c) y es perpendicular al plano $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$



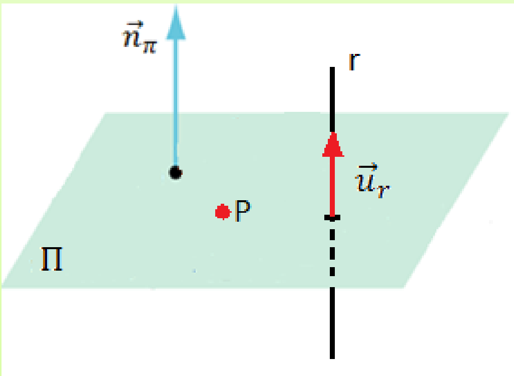
a. Si $r \perp \Pi \Longrightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\Pi \Longrightarrow \vec{u}_r \equiv \vec{n}_\Pi$

b. Calculamos $\vec{n}_\Pi = (A, B, C)$

c. La recta r viene determinada por:

$$r: \begin{cases} \text{Punto } P(a,b,c) \\ \vec{u}_r \equiv \vec{n}_\Pi = (A, B, C) \end{cases}$$

- Plano que pasa por u punto P(a,b,c) y es perpendicular a una recta r.



a. Si $r \perp \Pi \Longrightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\Pi \Longrightarrow \vec{u}_r \equiv \vec{n}_\Pi$

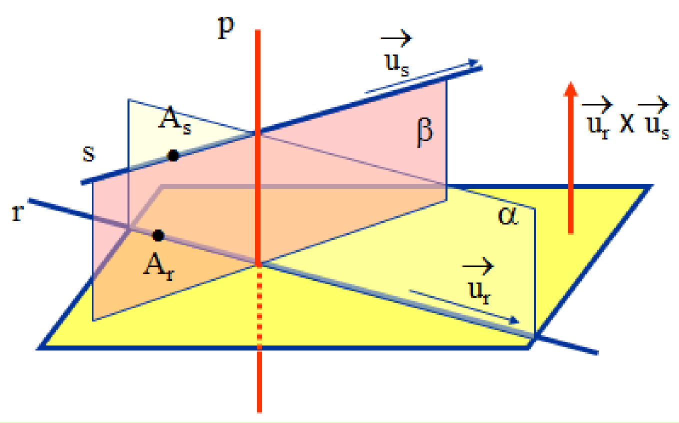
b. Calculamos $\vec{u}_r = (u_1, u_2, u_3)$

c. El plano Π viene determinado por:

$$r: \begin{cases} \text{Punto } P(a,b,c) \\ \vec{n}_\Pi = \vec{u}_r = (A, B, C) \end{cases}$$

11.9.3. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

La perpendicular común a dos rectas no paralelas es la recta que corta ortogonalmente a cada una de ellas.



La recta p, perpendicular común, queda determinada por el corte de los planos α y β.

Se observa que:

$$\alpha(A_r, \vec{u_r}, \vec{u_r} \times \vec{u_s})$$

$$\beta(A_s, \vec{u_s}, \vec{u_r} \times \vec{u_s})$$

Por lo tanto:

$$\det\left(\overrightarrow{A_rX}, \vec{u_r}, \vec{u_r} \times \vec{u_s}\right) = 0$$

$$\det\left(\overrightarrow{A_sX}, \vec{u_r}, \vec{u_r} \times \vec{u_s}\right) = 0$$

EJERCICIOS 11.9

1. **Halla la recta perpendicular al plano $x + z = 2$ y que pasa por el punto A(1,2,0).**

   Vector normal del plano: $\vec{n} = (1,0,1)$

   Este vector $\vec{n}$ será un vector de dirección de la recta r buscada. Por tanto:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}}$$

2. Halla el plano perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = z$ y que pasa por el origen de coordenadas.

El vector (2,1,1) es de dirección de la recta y, por tanto, normal del plano. En consecuencia, la ecuación del plano será:

$$\boxed{\pi: 2x + y + z = 0}$$

3. Halla el plano perpendicular a la recta

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{2x+y=3} \end{cases}$$

Y que pasa por el punto A(1,0,1).

Dos puntos de la recta:

- $x = 0, y = 3, z = 0 \Longrightarrow A(0,3,0)$
- $x = 1, y = 1, z = 1 \Longrightarrow B(1,1,1)$

Entonces $\overrightarrow{AB} = (1,-2,1)$ es normal al plano buscado:

$$\boxed{\pi: x - 1 - 2y + z - 1 = 0 \Longrightarrow x - 2y + z - 2 = 0}$$

4. **Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano:**

$$\boldsymbol{\pi: 2x + 2y - 3z = 6}$$

Y que pasa por el punto A(-2,3,4).

La recta buscada r tiene como vector de dirección a $\vec{n} = (2,2,-3)$ normal del plano π y pasa por A(-2,3,4).

Por tanto, r: $\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-3} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 3x + 2z - 2 = 0 \end{cases}}$

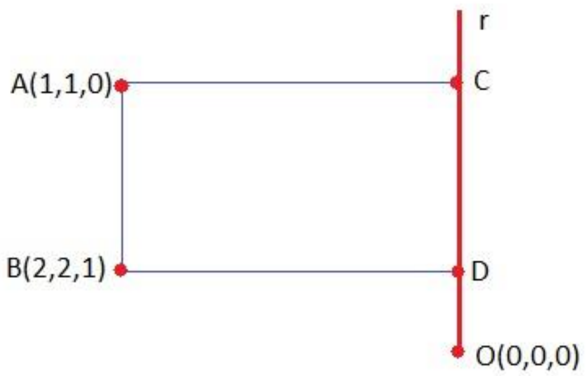
5. Calcula la ecuación del plano perpendicular a $\boldsymbol{\pi: x - y + 3z = 4}$ y que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = 3 + 2t} \end{cases}$$

El plano π' buscado tiene como vectores de dirección $\vec{u} = (1,-1,2)$ de la recta r y el normal $\vec{n} = (1,-1,3)$ del plano π. Además, pasa por el punto (1,2,3) de la recta r.

Por tanto, $\pi': \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-2 \\ 2 & 3 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$

6. Los puntos A(1,1,0) y B(2,2,1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.



Lado:

$AB \parallel CD \Longrightarrow \vec{u}_{AB} = \vec{u}_{CD}$

Ecuación del lado AB:

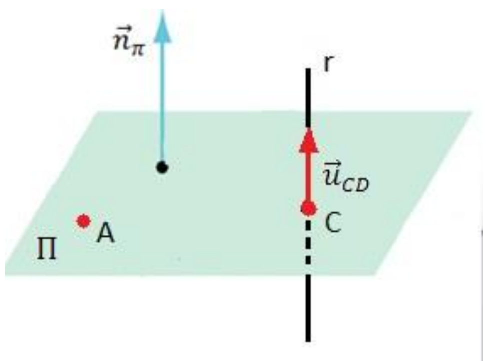
$$\begin{cases} pto.\, A(1,1,0) \\ vector\ \vec{u}_{AB} = (1,1,1) \end{cases}$$

Ecuación del lado CD:

$$\begin{cases} pto.\, O(0,0,0) \\ vector\ \vec{u}_{CD} = (1,1,1) \end{cases}$$

Lado AB: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ Lado CD: $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases}$

<u>Cálculo del pto. C</u>



Calculamos el plano π que pasa por A y es perpendicular al lado CD.

- Si $\pi \perp lado\ \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \vec{n}_\pi \equiv \vec{u}_{CD}$
  $\Longrightarrow \vec{n}_\pi = (1,1,1)$

- El plano π vendrá determinado por el pto. A(1,1,0) y $\vec{n}_\pi(1,1,1)$

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\vec{n}_\pi \longrightarrow \pi \equiv x + y + z + D = 0$$
$$A \in \pi \Longrightarrow 1 + 1 + 0 + D = 0$$
$$D = -2$$
$$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$$

- Ahora calculamos la intersección del lado CD con el plano π

$$\boxed{C = \pi \cap lado\ CD}$$

- Sólo tenemos que resolver el sistema:

$$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$$

$$\text{Lado CD} \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\mu + \mu + \mu - 2 = 0$$
$$3\mu - 2 = 0$$
$$\mu = {}^{2}/_{3}$$

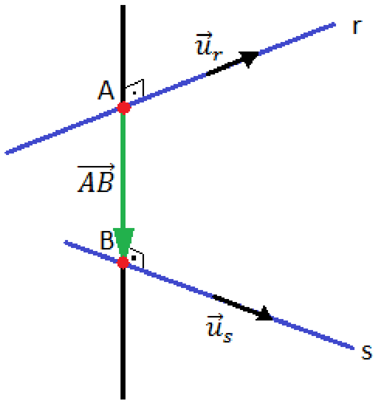
$$x = {}^{2}/_{3} \qquad y = {}^{2}/_{3} \qquad z = {}^{2}/_{3}$$

$$\boxed{C({}^{2}/_{3}, {}^{2}/_{3}, {}^{2}/_{3})}$$

Igualmente se hace para hallar el <u>punto D</u>, utilizando el pto. B.

7. Hallar la perpendicular común a las rectas

$$\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = \mu} \\ \boldsymbol{y = -1 + \mu} \\ \boldsymbol{z = -1} \end{cases}$$



$$\vec{u}_r = (0,0,1)$$
$$\vec{u}_s = (1,1,0)$$
$$A(1,1,\lambda)$$
$$B(\mu,-1+\mu,-1)$$

La recta (t) buscada es la que pasa por los puntos A y B.

El vector $\overrightarrow{AB} = (\mu - 1, -2 + \mu, -1 - \lambda)$ es el vector de dirección de la recta t.

Necesito calcular λ y μ, entonces tendré el vector $\overrightarrow{AB}$ y un punto de la recta t, por ejemplo el punto A.

<u>Cálculo del vector $\overrightarrow{AB}$</u>

$$\left.\begin{array}{l} t \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_r \Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}_r = 0 \\ t \perp s \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_s \Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}_s = 0 \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}_r = (\mu - 1, -2 + \mu, -1 - \lambda).(0,0,1) = 0 + 0 - 1 - \lambda = 0$$
$$\Longrightarrow -1 - \lambda = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}_s = (\mu - 1, -2 + \mu, -1 - \lambda).(1,1,0) = \mu - 1 - 2 + \mu + 0 = 0 \Longrightarrow 2\mu - 3 = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -1 - \lambda = 0 \\ 2\mu - 3 = 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = \frac{3}{2} \end{array}$$

Entonces:

Punto $A \in t; A(1,1,\lambda) = (1,1,-1)$

Vector $\overrightarrow{AB} \epsilon\ t;\ \overrightarrow{AB} = (\mu - 1, -2 + \mu, -1 - \lambda) =$

$$= (\frac{3}{2} - 1, -2 + \frac{3}{2}, -1 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$$

Por lo tanto:

$$t \equiv \begin{cases} A(1,1,-1) \\ \overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2) \end{cases}$$

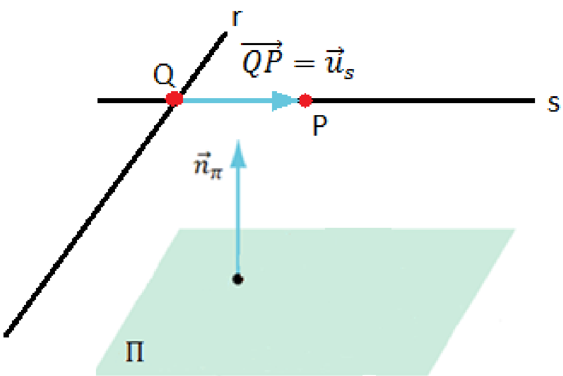
$$\boxed{t \equiv (x, y, z) = (1,1,-1) + \lambda(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)}$$

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P, corta a la recta r y es paralela al plano Π.

$\boldsymbol{P(1,1,1)}$

$\boldsymbol{\Pi \equiv x + y - 2z = 6}$

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}}$$



A la recta que nos piden la llamaremos *s.*

$\vec{n}_\Pi = (1,1,-2)$

Si *s* corta a *r* ⟹ la recta s viene determinada por el punto P y el vector de dirección $\vec{u}_s = \overrightarrow{QP}$ ó $\vec{u}_s = \overrightarrow{PQ}$.

Por otro lado si $s \perp \Pi \Longrightarrow \vec{u}_s \perp \vec{n}_\Pi \Longrightarrow \boxed{\vec{u}_s . \vec{n}_\Pi = 0}$

El punto $Q \in r$ es el que tengo que hallar.

$Q \in r \Longrightarrow$ Cumple las ecuaciones de la recta r. (¡OJO! Si la recta r no viene en paramétricas, pasamos la ecuación que nos den a paramétricas).

$Q \in r \Longrightarrow Q = (1 + 2\lambda, 3\lambda, -1 - \lambda)$ ⟶pto. genérico (cualquiera de r)

$\vec{u}_s = \overrightarrow{QP} = (-2\lambda, 1 - 3\lambda, 2 + \lambda)$

$$\vec{u}_s \perp \vec{n}_\Pi \Longrightarrow \vec{u}_s . \vec{n}_\Pi = 0 \Longrightarrow (-2\lambda, 1 - 3\lambda, 2 + \lambda)(1,1,-2) = 0$$

$$-2\lambda + 1 - 3\lambda - 4 - 2\lambda = 0$$

$$-7\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{3}{7}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{u}_s = \overrightarrow{QP} = \left(-2\left(-\frac{3}{7}\right), 1 - 3\left(-\frac{3}{7}\right), 2 + \left(-\frac{3}{7}\right)\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{u}_s = \left(\frac{6}{7}, \frac{16}{7}, \frac{11}{7}\right)}$$

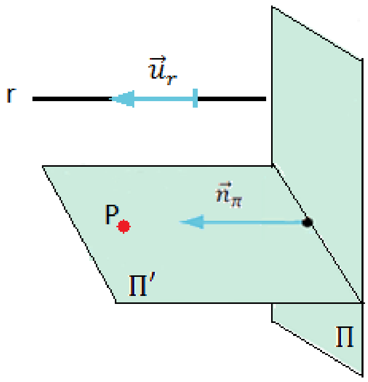
Por lo tanto:

$$s \left[\begin{array}{l} P(1,1,1) \\ \\ \vec{u}_s = \left(\frac{6}{7}, \frac{16}{7}, \frac{11}{7}\right) \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{s \equiv \left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{6}{7}\lambda \\ y = 1 + \frac{16}{7}\lambda \\ z = 1 + \frac{11}{7}\lambda \end{array} \right.}$$

9. Dado el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\Pi \equiv 2x - y + z = 1$ y la recta

$$r: \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación del plano Π' que pasa por P, es paralelo a r y es perpendicular al plano Π.



$P \in \Pi' \longrightarrow$ Ya tenemos un punto

$r \parallel \Pi' \longrightarrow \vec{u}_r$ es un vector de dirección de Π'

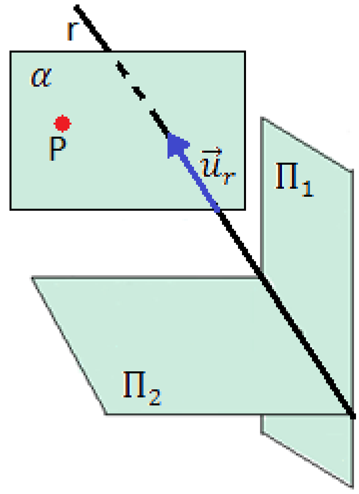
$\Pi \perp \Pi' \longrightarrow \vec{n}_\Pi$ es un vector de dirección de Π'

$$\Pi' \begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{u}_r(-1,-2,-3) \\ \vec{n}_\Pi(2,-1,1) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - (+2)\vec{j} - 3\vec{k} = (-1,-2,-3)$$

$$\boxed{\Pi' \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda - \mu \\ z = -1 - 3\lambda + \mu \end{cases}}$$

10. Dados los planos $\Pi_1 \equiv 3x + 2y + z = 0$ y $\Pi_2 \equiv 2x + y + 2z = 0$ y el punto P(1,0,1). Hallar la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a la recta intersección de Π_1 y Π_2.



Me piden el plano α.

$P \in \alpha \Longrightarrow$ Ya tenemos un punto P(1,0,1)

$\alpha \perp r \Longrightarrow \vec{u}_r = \vec{n}_\Pi \longrightarrow$ Sólo tenemos que hallar $\vec{u}_r$.

$$r \equiv \left[\begin{array}{l} \Pi_1 \equiv 3x + 2y + z = 0 \\ \\ \Pi_2 \equiv 2x + y + 2z = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \vec{n}_{\Pi_1} = (3,2,1) \\ \\ \vec{n}_{\Pi_2} = (2,1,2) \end{array}\right.$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} = (3, -4, -1)$$

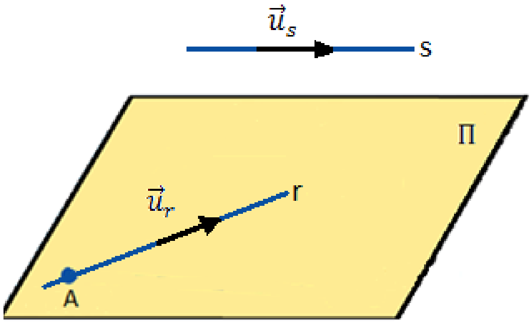
$$\alpha \equiv \left[\begin{array}{l} P(1,0,1) \\ \\ \vec{n} = (2, -4, -1) \end{array}\right] \Longrightarrow 2x - 4y - z + D = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2.(1) - 4(0) - 1 + D = 0 \longrightarrow \boxed{D = -1} \Longrightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x - 4y - z - 1 = 0}$$

11.Considera las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + z - 2 = 0} \\ \boldsymbol{x - y - 1 = 0} \end{cases} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{s}: \boldsymbol{\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z}{3}}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.



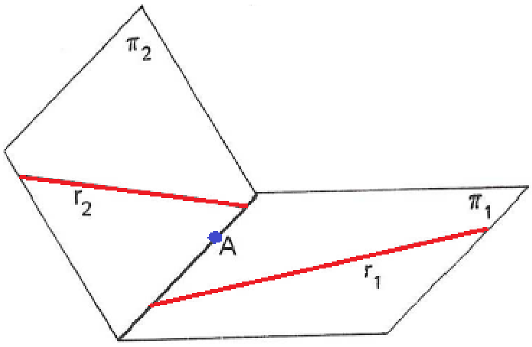
$$r \in \pi \Longrightarrow \begin{cases} A\ de\ r \in \pi \\ \vec{u}_r \text{ es un vector de dirección del plano} \end{cases}$$

$s \parallel \pi \Longrightarrow \vec{u}_s$ es otro vector de dirección del plano π.

$$\pi: \begin{cases} A \in r \\ \vec{u}_s \\ \vec{u}_r \end{cases}$$

Con esto queda definido el plano π.

12. Dadas dos rectas r_1 y r_2 y un punto A, no situado sobre ninguna de las rectas, hallar la recta que pasa por el punto A y corta a las rectas r_1 y r_2.



Se halla el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto A, y el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto A. los planos π_1 y π_2 se cortan según la recta pedida.

Sea hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(4,0,1) y corta a las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: \begin{cases} 2x - 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

La ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto A está calculada en el último ejemplo, es:

$6x + 13y + 8z - 32 = 0$ **(a)**

Para calcular el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto A hallamos dos punto de r_2: para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, resultan, respectivamente, los puntos B(1,2,-1) y C(3,-1,0). El plano π_2 es el contiene los puntos A, B y C, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-4(x-3) - (y+1) + 5z = 0 \Rightarrow -4x - y + 5z + 11 = 0$ **(b)**

Los planos (a) y (b) determinan la recta pedida.